

## UTJECAJ RASPODJELE I UDJELA POJEDINIH SLOJEVA NA ODZIV LAMINATNE KONSTRUKCIJE

Kovačić, L. & Jarak, T.

**Sažetak:** U radu je provedena je analiza utjecaja različitih materijalnih, kao što su vrsta vlakana korištenih za ojačanje, te udio, debljina i raspored slojeva po visini poprečnog presjeka, na ponašanje realnih ljuskastih konstrukcija izrađenih od kompozitnih laminatnih materijala. Proračuni su izvršeni pomoću metode konačnih elemenata u programskom paketu ABAQUS.

**Ključne riječi:** kompozitni materijali, laminat, metoda konačnih elemenata, ploče, ljuske.

### 1 UVOD

Laminati se sastoje od više slojeva izrađenih od istog ili različitih kompozitnih materijala. Uslijed takve strukture materijala raspodjela naprezanja i odziv konstrukcije u općenitom slučaju značajno ovisi o vrsti materijala pojedinog sloja, o orijentaciji vlakana u svakom od slojeva, o debljini slojeva po visini poprečnog presjeka laminata te o rasporedu pojedinih slojeva po visini poprečnog presjeka. Stoga je pri projektiranju moguće provesti optimizaciju s obzirom na naveden parametre u svrhu smanjenja težine konstrukcije.

U ovom radu provedena je analiza utjecaja pojedinih parametara za laminat koji je sastavljen od pletenih kompozitnih materijala s epoksidnom matricom te ugljičnim, odnosno staklenim vlaknima. Provedena je parametarska analiza u kojoj je analiziran utjecaj pojedinih parametara na ponašanje laminatne ploče opterećene na savijanje. Nakon toga je analizirana realna statički opterećena ljuskasta konstrukcija, pri čemu je provedena detaljna analiza naprezanja i provjera Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterija popuštanja [3]. Također je izvršena optimizacija ljuskaste konstrukcije s obzirom na ukupnu težinu.

### 2 ANALIZA NAPREZANJA U LAMINATIMA

U laminatnim materijalima pretpostavlja se ravninsko stanje naprezanja u svakom sloju 0, 0. Tenzor elastičnosti definira se u svakom pojedinom sloju u odnosu na materijalni koordinatni sustav sloja kao:

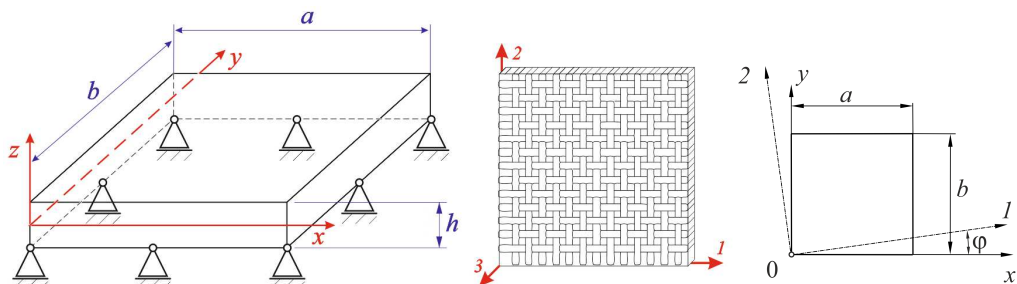
$$\sigma_k = Q_k \epsilon_k, \quad (1)$$

gdje su  $\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{12}]^T$  i  $\epsilon = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \gamma_{12}]^T$  vektori naprezanja, odnosno deformacije u materijalnom koordinatnom sustavu O12, koji je u općem slučaju za neki kut  $\varphi$  otklonjen od globalnog koordinatnog sustava laminata Oxy (vidi Sliku 1).

$Q_k$  je matrica elastičnosti za sloj  $k$  u laminatu:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}_k, Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{33} = G_{12}. \quad (2)$$

U gornjem izrazu,  $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$  su materijalni parametri pojedinog sloja  $k$  definirani u O12 ravni.



Sl. 25. Kompozitna ploča. Lijevo: geometrija; Sredina: materijalni koordinatni sustav; Desno: definicija orijentacije materijalnog koordinatnog sustava.

Nakon transformacije vektora napreznja i vektora deformacije iz materijalnog u globalni koordinatni sustav, konstitutivne relacije za pojedini sloj mogu se zapisati kao:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k. \quad (3)$$

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k$  i  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  su sada vektori napreznja i deformacije u globalnom koordinatnom sustavu laminata Oxy, a  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  je materijalna matrica u odnosu na globalni koordinatni sustav koja se računa kao:

$$\bar{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}_\varepsilon. \quad (4)$$

U izrazu (4)  $\mathbf{T}_\sigma$  i  $\mathbf{T}_\varepsilon$  su matrice transformacije za tenzor napreznja, odnosno tenzor deformacije, iz globalnog u materijalni koordinatni sustav. Komponente matrica  $\mathbf{T}_\sigma$  i  $\mathbf{T}_\varepsilon$  ovise o kutu orijentacije sloja u odnosu na globalni koordinatni sustav.

Rezultantne unutarnje sile i momenti u globalnom koordinatnom sustavu koji nastaju uslijed raspodjele napreznja (3) i (4) računaju se integriranjem po visini poprečnog presjeka cijelog laminata, vodeći pri tome računa o debljini pojedinih slojeva 0, 0. Prema tome, raspodjela napreznja u laminatu ovisit će i o debljini pojedinih slojeva i o položaju slojeva po visini laminata.

Prilikom proračuna čvrstoće laminatnih konstrukcija, kod višedimenzijskih stanja napreznja potrebno je provjeriti odgovarajuće kriterije popuštanja materijala. Zbog znatno složenije mikrostrukture takvih materijala, ti kriteriji popuštanja su bitno drugačiji od onih za klasične izotropne materijale. Do sada je predložen veliki broj različitih kriterija koji u općenitom slučaju mogu davati bitno drugačija predviđanja ponašanja materijala 0. U programskom paketa ABAQUS dostupni su među ostalima i Tsai-Hill i Tsai-Wu kriteriji popuštanja 0, koji se danas vrlo često koriste u inženjerskoj praksi. U ABAQUS se izračunava vrijednost Tsai-Hill kriterija u više točaka po visini sloja prema izrazu:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} < 1, \quad (5)$$

gdje su  $X$ ,  $Y$  i  $S$  parametri čvrstoće materijala 0, 0. Vrijednost Tsai-Wu kriterija izračunava se prema izrazu:

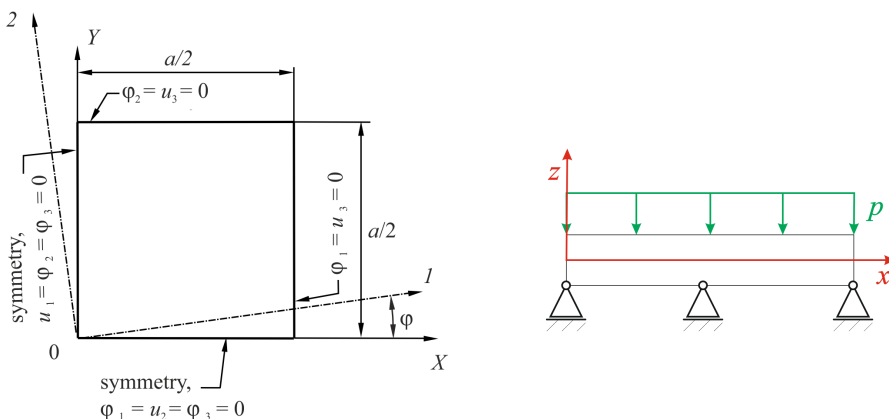
$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j < 1, (6)$$

gdje se parametri  $F_i$  i  $F_{ij}$  određuju iz parametara čvrstoće 0, 0. Vrijednost kriterija jednaka 1 označava kritično stanje, tj. za vrijednosti manje od 1 ne dolazi do popuštanja, dok za vrijednosti iznad 1 dolazi do popuštanja materijala.

### 3 NUMERIČKI PRIMJERI

#### 3.1 Laminatna ploča opterećena na savijanje kontinuiranim poprečnim opterećenjem

Verifikacija numeričkih modela izvršena je na primjeru pravokutne ploče dimenzija  $a \times b$  i debljine  $h$ , slobodno oslonjene na sva 4 ruba i opterećene kontinuiranim opterećenjem konstantnog iznosa  $p$ . Dimenzije i opterećenje ploče:  $a = 500$  mm,  $b = 500$  mm,  $h = 12$  mm,  $p = 0,1$  N/mm<sup>2</sup>. Materijal ploče je pleteni kompozit s epoksidnom matricom ojačanom staklenim vlaknima (GFRP). Za verifikaciju je korišten model s 1 kompozitnim slojem orijentacije  $0^\circ$  u odnosu na os  $x$ . Struktura sloja prikazana je na Slici 1, sredina. Zadana svojstva materijala:  $E_1 = E_2 = 29,7$  GPa,  $G_{12} = G_{13} = 5,3$  GPa,  $G_{23} = 0,75G_{12} = 3,975$  GPa,  $\nu_{12} = 0,17$ ,  $S_1^+ = S_2^+ = 367$  MPa,  $S_1^- = S_2^- = 549$  MPa,  $S_{12} = 97$  MPa. Verifikacijski model prikazan je na Slici 2. Zbog simetrije problema, modelirana je samo jedna četvrtina ploče.



Sl. 26. Laminatna kompozitna ploča. Lijevo: rubni uvjeti pomaka; Desno: opterećenje.

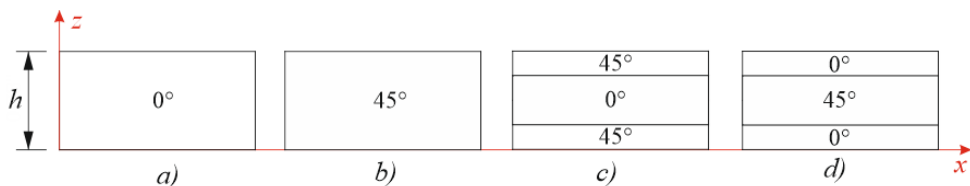
Analitičko rješenje za progib kompozitne ploče pri savijanju dobiveno je razvijanjem u red prema 0. Tablicama 1 i 2 je prikazana usporedba analitičkog rješenja s numeričkim rezultatima za središnju točku. Ploča je diskretizirana četverokutnim ljuskastim elementima S8R sa 6 stupnjeva slobode po čvoru i elementima S85R s 5 stupnjeva slobode po čvoru. Utjecaj orijentacije slojeva najprije je ispitan za GFRP materijal, pri čemu su razmatrana 4 različita rasporeda slojeva, prikazana na Slici 3. U slučajevima c) i d) udijeli slojeva s orijentacijom  $0^\circ$  i  $45^\circ$  iznose 50%. Provedena je usporedba vrijednosti kriterija popuštanja, a rezultati su prikazani u Tablici 3.

Tablica 1. Konvergencija numeričkog rješenja (S8R konačni elementi)

	analitički	Numerički, S8R				
		4 KE	16 KE	100 KE	625 KE	2500 KE
$w_T / \text{mm}$	7,625	5,697	7,663	7,675	7,661	7,675
$M_x / \text{N}$	1428,12	1767	1568	1467	1447	1449
$M_y / \text{N}$	1428,12	1767	1569	1468	1449	1451
$\sigma_x / \text{N/mm}^2$	59,50	71,47	65,36	61,18	60,37	60,46
$\sigma_y / \text{N/mm}^2$	59,50	73,61	65,33	61,11	60,30	60,39

Tablica 2. Konvergencija numeričkog rješenja (S85R konačni elementi)

	analitički	Numerički, S85R				
		4 KE	16 KE	100 KE	625 KE	2500 KE
$w_T / \text{mm}$	7,625	7,942	7,687	7,674	7,660	7,674
$M_x / \text{N}$	1428,12	2029	1570	1467	1448	1450
$M_y / \text{N}$	1428,12	2029	1570	1467	1448	1450
$\sigma_x / \text{N/mm}^2$	59,50	84,54	65,42	61,14	60,33	60,42
$\sigma_y / \text{N/mm}^2$	59,50	84,54	65,42	61,14	60,33	60,42

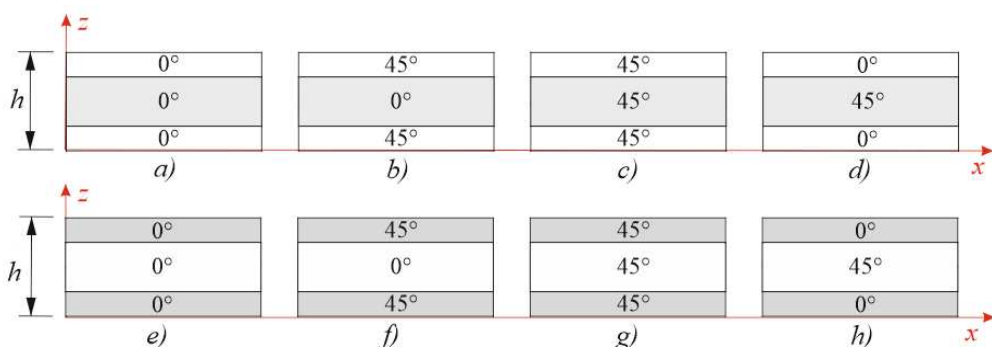


Sl. 27. Rasporedi orijentacija slojeva

Tablica 3. Vrijednosti kriterija popuštanja

	a)	b)	c)	d)
<b>Tsai-Hill</b>	0,2262	0,6448	0,5877	0,4025
<b>Tsai-Wu</b>	0,2533	0,7074	0,6558	0,3918

U nastavku je provedena analiza za ploču izrađenu od 2 različita materijala. Uz prethodno navedeni materijal sa staklenim vlaknima (GFRP), korišten je kompozit s ugljičnim vlaknima i epoksidnom matricom (CFRP). Zadana svojstva CFRP materijala su  $E_1 = E_2 = 74 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 4,55 \text{ GPa}$ ,  $G_{23} = 0,75 G_{12} = 3,4125 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0,05$ ,  $S_1^+ = 499 \text{ MPa}$ ,  $S_2^+ = 458 \text{ MPa}$ ,  $S_1^- = S_2^- = 352 \text{ MPa}$ ,  $S_{12} = 46 \text{ MPa}$ . Razmatrane raspodjele slojeva prikazane su na Slici 4. Vrijednosti primijenjenih kriterija popuštanja dane su u Tablici 4.



Sl. 28. Raspored slojeva (bijelo GFRP, sivo CFRP)

Tablica 4. Vrijednosti kriterija popuštanja

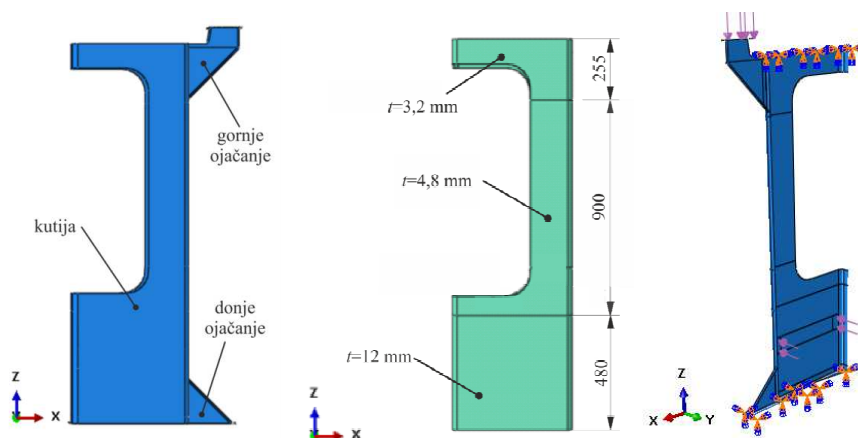
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Tsai-Hill	0,2026	0,1642	0,1501	0,1797	0,2287	0,2379	0,2375	0,2254
Tsai-Wu	0,2283	0,1770	0,1551	0,1952	0,3230	0,1842	0,1839	0,3151

### 3.2 Realna ljuskasta laminatna konstrukcija

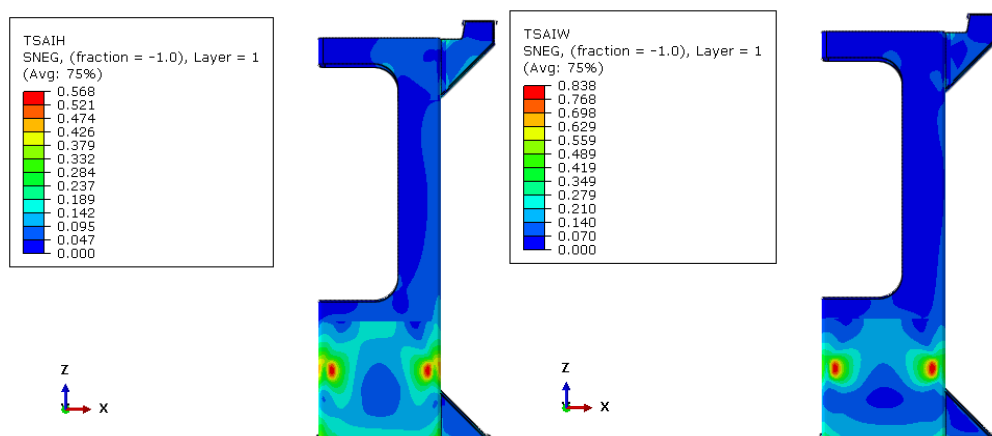
U nastavku je prikazana numerička simulacija realne statički opterećene laminatne ljuskaste konstrukcije, provedena s ciljem optimiranja težine konstrukcije. U početnoj verziji cijela konstrukcija je izrađena od GFRP laminata debljine 8 mm. Na temelju rezultata numeričkih simulacija, konstrukcija je podijeljena na nekoliko dijelova od kojih svaki ima različitu debljinu laminata i različito raspodijeljene slojeve unutar laminata. Geometrija konstrukcije i primijenjeni rubni uvjeti prikazani su na Slici 5. Dijelovi debljina 3,2 mm i 4,8 mm izrađeni su od GFRP (orijentacija svih vlakana je 0°), dok je za dijelove debljine 12 mm korišten simetrični kompozit s ugljičnim i staklenim vlaknima (GFRP + CFRP). Debljina ugljičnih slojeva iznosi 2,4 mm, s orijentacijom 45° smještenih u sredini laminata, dok se s vanjskih strana nalaze stakleni slojevi s orijentacijom 0°. Svi kutovi orijentacije pojedinih slojeva u laminatu definirani su s obzirom na horizontalnu ravninu modela Oxy. Na Slici 6 prikazane su raspodjele vrijednosti parametara kriterija popuštanja. Kao što je vidljivo, vrijednosti Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterija u ovom primjeru se značajno razlikuju.

## 5 ZAKLJUČAK

U radu su prikazana analiza utjecaja različitih materijalnih parametara laminatnog materijala na ponašanje realnih konstrukcija. Proračuni su izvršeni pomoću metode konačnih elemenata u programskom paketu ABAQUS. Kut orijentacije ima velik utjecaj na čvrstoću laminatne ploče. Taj utjecaj postaje blaži ako se u laminatu slojevi orijentiraju pod različitim kutovima. Odaziv konstrukcije značajno se mijenja ako je laminat sastavljen od slojeva izrađenih od različitih materijala, pri čemu značajan utjecaj ima položaj pojedinih slojeva u laminatu. Svi navedeni parametri imaju još veći utjecaj kod realnih ljuskastih konstrukcija te je potrebno pažljivo dizajnirati strukturu laminata u pojedinim dijelovima konstrukcije u svrhu optimiranja konstrukcije. Također, primjenjivani kriteriji popuštanja mogu dati različita predviđanja ponašanja materijala.



Sl. 29. Realna statički opterećena konstrukcija. Lijevo i sredina: geometrija; Desno: rubni uvjeti.



Sl. 30. Raspodijela Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterija popuštanja

## Literatura:

- [1] Manahan, M.A., A Finite Element Study of the Deflection of Simply Supported Composite Plates Subject to Uniform Load, Rensselaer Polytechnic Institute Hartford, Connecticut, 2011.
- [2] Smojver, I., *Mehanika kompozitnih materijala*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2007.
- [3] Staab, G., *Laminar Composites*, Elsevier, 2015.
- [4] ABAQUS ver. 6.14, *Abaqus Documentation*, Dassault Systèmes, Providence, 2014.

## Autori:

**Luka Kovačić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, HR-10002 Zagreb, e-mail: luka.kovacic3@gmail.com

**Tomislav Jarak**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, HR-10002 Zagreb, tel: 01 6168 514, fax: 01 6168 187, e-mail: [tomislav.jarak@fsb.hr](mailto:tomislav.jarak@fsb.hr), web stranica: [www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/jarak](http://www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/jarak)